

§7. Сызықты жүйенің орнықтылығы

7.1. n теңдеуден тұратын тұрақты коэффициентті сызықты біртекті жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1)$$

Бұл жүйенің теңбе-теңдік қалпы $x=0$ нүктесінің орнықтылық, орнықсыздық шарттарын келтірейік.

Теорема-1. Егер A матрицасының барлық меншікті сандарының нақты бөліктері теріс болса, онда (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы асимптотикалы орнықты, ал егер сол меншікті сандардың ең болмағанда біреуінің нақты бөлігі оң болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Дәлелдеуі. Айталық, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - сандары A матрицасының меншікті сандары болсын және $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\alpha < 0, (i=1, \dots, n)$. Бұл жағдайда Ляпунов функциясын құру үшін A матрицасын алдын ала диагоналды дерлік түрге келтіреміз. Алгебрадан белгілі, A матрицасы үшін кейбір T матрицасын табуға болады және ол мынандай теңдікті қанағаттандырады:

$$T^{-1}AT = \Lambda + B_\varepsilon$$

Мұнда $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, ал $B_\varepsilon = (b_{ij})$ - матрицасының әрбір элементі $|b_{ij}| \leq \varepsilon, (i, j = 1, \dots, n)$ шартын қанағаттандырады.

(1) жүйе үшін $x = Ty$ алмастыруын қолдансақ,

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda + B_\varepsilon)y \quad (2)$$

жүйесіне келеміз. Осы жүйеге Ляпунов функциясын төмендегідей түрде алайық:

$$V(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = (y, \bar{y}) \quad (3)$$

Бұл функция $x=0$ нүктесінің (немесе $y=0$ нүктесінің) кез келген аймағында анықталған оң таңбалы. Енді оның туындысын есептейік:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \frac{d}{dt}(y, \bar{y}) = \left(\frac{dy}{dt}, \bar{y}\right) + \left(y, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) = \\ &= ((\Lambda + \bar{\Lambda})y, \bar{y}) + [(B_\varepsilon y, \bar{y}) + (y, B_\varepsilon \bar{y})] \end{aligned}$$

Осындағы бірінші қосындыны бағаласақ,

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \bar{\lambda}_i) |y_i|^2 = 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \lambda_i |y_i|^2 \leq -2\alpha \sum_{i=1}^n |y_i|^2$$

теңсіздігін аламыз. Екінші қосындыны бағалайық:

$$\begin{aligned} \|(B_\varepsilon y, \bar{y})\| &= \|(y, B_\varepsilon \bar{y})\| \leq \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}| |y_i| |y_j| \leq \varepsilon \sum_{i,j=1}^n |y_i| |y_j| = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n |y_i|\right)^2 \leq n\varepsilon \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \quad \text{Осыдан} \\ \dot{V}(y) &\leq -2(\alpha - n\varepsilon) \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = -2(\alpha - n\varepsilon) V(y) \quad (4) \end{aligned}$$

Соңғы қатынастағы ε санын $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{n}$ теңсіздігі орындалатындай етіп алсақ, онда $\dot{V}(y)$ функциясының анықталған теріс таңбалы болатынын көреміз. Сондықтан, Ляпуновтың екінші теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып асимптотикалы орнықты.

Теореманың екінші бөлігіне келетін болсақ, кейбір λ_{i_0} меншікті санның нақты бөлігі оң болсын: $\operatorname{Re} \lambda_{i_0} > 0$. Бұл санға сәйкес шешім

$$x(t) = e^{\lambda_{i_0} t} f \quad (5)$$

түрінде жазылады. Мұндағы, f - сәйкес меншікті вектор. Осыдан

$$\|x(t)\| = e^{\alpha t} \|f\|, \alpha = \operatorname{Re} \lambda_{i_0} \quad (6)$$

$\alpha > 0$ болғандықтан, t шексіздікке ұмтылғанда $\|x(t)\|$ нөлге ұмтылмайды, яғни теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Ескерту-1. Егер A матрицасының меншікті сандарының нақты бөліктері нөлге тең болып, қалғандарының нақты бөліктері теріс болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықты да, орнықсыз да болуы мүмкін. Егер таза жорамал санға сәйкес жордан шаршысының реті бірден аспаса, онда теңбе-теңдік қалып орнықты. Кері жағдайда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Мысалы, λ_1 меншікті саны таза жорамал сан болса, ал оған екінші ретті жордан шаршысы сәйкес келсе, онда шешім

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} (f + tg) \quad (7)$$

түрінде жазылады. Мұндағы, f, g - тұрақты меншікті векторлар. Осыдан

$$\|x(t)\| = \|f + tg\| \geq t\|g\| - \|f\| \rightarrow \infty \text{ егер } t \rightarrow \infty,$$

яғни теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Ескерту-2. Жоғарыда айтылған тұжырымдарды (1) жүйенің айқын шешімін пайдаланып дәлелдеуге де болады. Ол шешім былай жазылады:

$$x(t, x^0) = e^{tA} x^0 \quad (8)$$

Мұнда тек e^{tA} матрицасының түрін анықтау керек. Жоғарғы әдістің бір артықшылығы – оны сызықты емес жүйеге де қолдануға болатындығы.

Соңғы екі тұжырымның дәлелдеулерін [4] оқу құралынан көруге болады.

Сызықты жуықтау арқылы орнықтылықты зерттеу

7.2. Айталық, $x = 0$ нүктесі автономды

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

жүйенің теңбе-теңдік қалпы болсын, яғни $f(0) = 0$. Осы $x = 0$ нүктесінің кейбір U аймағында $f(x)$ функциясы екінші ретке дейін үздіксіз дифференциалдансын. Тейлор формуласы бойынша:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + g(x) \quad (2)$$

Мұнда $f(0) = 0$, $f'(0)$ - Якоби матрицасы, оның әрбір элементі $\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}$, $(i, k = 1, \dots, n)$,

түрінде анықталады. Ал $g(x)$ функциясы үшін

$$\|g(x)\| \leq C\|x\|^2, \quad x \in U \quad (3)$$

шарты орындалады. Сондықтан, жуықтап, $f(x) \approx f'(0)x$ деп алуға болады. Егер $\left(\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}\right) = A$ деп белгілесек, төмендегідей сызықты жүйе аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4)$$

Сызықты емес (1) жүйеден (4) жүйеге көшуді жүйені сызықтандыру деп атайды. Ол белгілі бір шешімнің аймағында орындалады.

Сызықтандырылған (4) жүйе – тұрақты коэффициентті сызықты жүйе. Ол оңай интегралданады. Сондықтан, оның $x=0$ теңбе-теңдік қалпының орнықтылығы толық зерттелген. Оны өткен параграфта келтірдік.

Енді осы сызықтандырылған (4) жүйенің теңбе-теңдік қалпының орнықтылығына қарап бастапқы сызықты емес (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпының орнықтылығын анықтау мүмкіншілігін қарастырайық. Бұл жөнінде Ляпуновтың іргелі тұжырымы төмендегідей.

Теорема-1. Айталық, $f(x)$ вектор-функциясы теңбе-теңдік қалыптың кейбір аймағында екі рет үздіксіз дифференциалдансын. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының нақты бөліктері теріс болса, онда сызықты емес (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы асимптотикалы орнықты және кез келген шешім үшін төмендегідей шарт орындалады:

$$\|x(t, x^0)\| \leq C e^{-\alpha t} \|x^0\|, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (5)$$

мұнда $\alpha > 0$, $C > 0$, x^0 - мейлінше аз шама.

Дәлелдеуі. Берілген (1) жүйені (2) жіктеуді пайдаланып төмендегідей түрде жазайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) \quad (5)$$

Мұндағы, $A = \left(\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_k}\right)$ - тұрақты матрица, ал $g(x)$ функциясы (3) теңсіздікті қанағаттандырады. Өткен параграфта көрсетілгендей, кейбір T - матрицасы арқылы A матрицасын диагоналды дерлік түрге келтіреміз. Ол үшін $x = Ty$ алмастыруын жасасақ, жүйе мына түрге келеді:

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda + B_\varepsilon)y + h(y) \quad (6)$$

Мұнда Λ - диагоналды матрица, $B_\varepsilon = (b_{ij})$ - матрицасының әрбір элементі шектелген: $|b_{ij}| \leq \varepsilon$, ал $h(y) = T^{-1}g(Ty)$.

Ляпунов функциясы үшін сол алдыңғы параграфта көрсетілген функцияны алайық:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = (y, \bar{y}) \quad (7)$$

Бұл функция анықталған оң таңбалы. Енді осы функцияның (6) жүйе бойынша алынған туындысын есептейік:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \frac{d}{dt}(y, \bar{y}) = \left(\frac{dy}{dt}, \bar{y}\right) + \left(y, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) = \\ &= \left[(\Lambda + B_\varepsilon)y, \bar{y}\right] + \left(y, (\bar{\Lambda} + \bar{B}_\varepsilon)\bar{y}\right) + \left[h(y), \bar{y}\right] + \left(y, \overline{h(y)}\right) \equiv A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Мұнда A_1 және A_2 сәйкес бірінші және екінші квадрат жақшалардың ішіндегі өрнектерді білдіреді. Осындағы A_1 қосындысы сызықты

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda + B_\varepsilon)y \quad (9)$$

жүйе бойынша алынған туындыны білдіреді. Сондықтан §3 параграфтағы теорема-5 бойынша (онда $\dot{V}(y) \leq -\alpha V(y)$) деп көрсетілген):

$$A_1 \leq -\gamma \|x\|^2, \gamma > 0 \quad (10)$$

Осы сияқты

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|T^{-1}x\| \leq C_1 \|x\|, \\ \|h(y)\| &= \|T^{-1}g(Ty)\| \leq C_2 \|g(x)\| \leq C_2 C_3 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Осыдан

$$\|A_2\| \leq 2\|y\| \|h(y)\| \leq C\|x\|^3 \quad (11)$$

мұндағы $C = 2C_2C_3$.

Сондықтан,

$$\dot{V}(x) \equiv A_1 + A_2 \leq -\|x\|^2(\gamma - C\|x\|) \quad (12)$$

Егер кейбір $U_1 \subset U$ аймағында $\|x\| \leq \frac{\gamma}{2}C$ деп алсақ, онда

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{\gamma}{2}\|x\|^2, \forall x \in U_1 \quad (13)$$

яғни U_1 облысында $\dot{V}(x)$ функциясы анықталған теріс таңбалы мән қабылдайды және

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x), \forall x \in U_1 \quad (14)$$

мұндағы $\alpha > 0$. Ляпуновтың екінші теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып $x=0$ асимптотикалы орнықты. (14) теңсіздіктен (5) шарты оңай шығады (§3).

Теорема-2. Айталық, $f(x)$ вектор-функциясы теңбе-теңдік қалыптың кейбір аймағында екі рет үздіксіз дифференциалдансын. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының кейбіреуінің нақты бөлігі оң болса, онда теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Дәлелдеуі. Айталық, λ_n меншікті санының нақты бөлігі оң болсын: $\text{Re} \lambda_n > 0$. Бұл жағдайда A матрицасына T түрлендіруін пайдаланып, оны төменгі үшбұрышты диагоналды түрге келтірсек, соңғы теңдеу

$$\frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n + h_n(y) \quad (15)$$

түрінде жазылады. Осы теңдеу үшін Четаев функциясын мына түрде алайық:

$$V(x) = |y_n|^2 = (y_n, \overline{y_n}) \quad (16)$$

Осы функцияның (15) теңдеу бойынша туындысын есептейік:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left(\frac{dy_n}{dt}, \overline{y_n} \right) + \left(y_n, \frac{d\overline{y_n}}{dt} \right) = (\lambda_n y_n + h_n(y), \overline{y_n}) + \\ &+ (y_n, \overline{\lambda_n y_n} + \overline{h_n(y)}) = 2\text{Re} \lambda_n (y_n, \overline{y_n}) + h(y) = 2\text{Re} \lambda_n |y_n|^2 + h(y) \end{aligned}$$

мұндағы, $\|h\| \leq C\|y\|^3$.

Соңғы теңдіктен

$$\dot{V}(x) \geq 2\text{Re} \lambda_n |y_n|^2 - C\|y\|^3 \quad (17)$$

теңсіздігін аламыз. Осы (16) және (17) қатынастардан $x=0$ нүктесінің кейбір аймағында

$V(x) > 0$ және $\dot{V}(x) > 0$ болатынын көреміз. Мысалы, $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_{n-1} = 0, y_n \neq 0$

нүктесінде $V(x)$ және $\dot{V}(x)$ функциялары анықталған оң таңбалы. Сондықтан, U_1 аймағы

үшін $y_n \neq 0$ облысын алсақ, жеткілікті. Егер $|y_n|$ жеткілікті аз шама болса, онда $U_1 \subset U$ және оның ішкі шекарасында $x = 0$ нүктесі жатыр. Четаев теоремасы бойынша теңбе-теңдік қалып орнықсыз.

Теорема-3. Егер Якоби матрицасының меншікті сандарының кейбіреулерінің нақты бөліктері нөлге тең болып, қалғандарының нақты бөліктері теріс болса, онда (5) жүйедегі $g(x)$ функциясының берілуіне қарай теңбе-теңдік қалып орнықты да, орнықсыз да бола алады. Мұндай жағдайларды ерекше жағдайлар деп атайды. Олар туралы мағлұматтарды арнаулы [8] кітабынан алуға болады.